Глава 4

Ъглов момент

4.1 Ъглов момент. Дължина и проекция на ъгловия момент.

В класическата механика моментът на импулса (или ъгловия момент) се дефинира с добре познатото векторно произведение на координатата $\overrightarrow{r}$ и импулса $\overrightarrow{p}$:

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}. \tag{4.1}$$

Следвайки принципа на съответствието, в квантовата механика ъгловият момент се дефинира по аналогичен начин, като физичните променливи се заменят с оператори:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}, \tag{4.2}$$

където за графична простота ще използваме означението за вектор $\hat{\mathbf{a}} \equiv \overrightarrow{\hat{a}}$.

Комутационни свойства

Нека да изведем комутационните съотношения за компонентите на $\hat{L}_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Ще използваме познатата формула за комутатора на компонентите на операторите на координатата и импулса:

$$[\hat{r}_k, \hat{p}_n] = i\hbar\delta_{kn} \qquad \delta_{kn} = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Ще използваме формулата за компонентите на векторното произведение

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}})_k = \varepsilon_{klm}\hat{r}_l\hat{p}_m, \tag{4.4}$$

където за простота използваме конвенцията в математичната физика (идваща от Айнщайн), че *по повтарящ се индекс се сумира*:

$$a_n b_n \equiv \sum\nolimits_{n=1}^{3} a_n b_n. \tag{4.5}$$

ε_{klm} е *символът на Леви-Чивита*, който има следните стойности:

- $\varepsilon_{klm} = 0$, ако два или три от индексите му са равни;

- $\varepsilon_{klm} = 1$, ако индексите му са подредени в четен (прав) ред (123, 231, 312);
- $\varepsilon_{klm} = -1$, ако индексите му са подредени в нечетен (обратен) ред (213, 132, 321).

Символът на Леви-Чивита не променя стойността си при *циклична смяна* на индексите: $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{mkl} = \varepsilon_{lmk}$. Ще използваме и формулата за сумиране на такива символи:

$$\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{jmn} \equiv \sum\nolimits_{j=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}. \tag{4.6}$$

Сега ще докажем комутационното съотношение

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_n] = i\hbar\varepsilon_{knm}\hat{L}_m. \tag{4.7}$$

Доказателство. Използвайки горните формули, получаваме

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_k, \hat{L}_n] &= [(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}})_k, (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}})_n] = \varepsilon_{klm}\varepsilon_{nqs}[\hat{r}_l\hat{p}_m, \hat{r}_q\hat{p}_s] && \text{(4.8а)}\\
&= \varepsilon_{klm}\varepsilon_{nqs}[\hat{r}_l\hat{p}_m\hat{r}_q\hat{p}_s - \hat{r}_q\hat{p}_s\hat{r}_l\hat{p}_m] && \text{(4.8б)}\\
&= \varepsilon_{klm}\varepsilon_{nqs}[\hat{r}_l(\hat{r}_q\hat{p}_m - i\hbar\delta_{mq})\hat{p}_s - \hat{r}_q(\hat{r}_l\hat{p}_s - i\hbar\delta_{ls})\hat{p}_m] && \text{(4.8в)}\\
&= i\hbar\varepsilon_{klm}\varepsilon_{nqs}[\delta_{ls}\hat{r}_q\hat{p}_m - \delta_{mq}\hat{r}_l\hat{p}_s] && \text{(4.8г)}\\
&= i\hbar\varepsilon_{klm}\varepsilon_{nql}\hat{r}_q\hat{p}_m - i\hbar\varepsilon_{klm}\varepsilon_{nms}\hat{r}_l\hat{p}_s && \text{(4.8д)}\\
&= i\hbar(\delta_{mn}\delta_{kq} - \delta_{mq}\delta_{kn})\hat{r}_q\hat{p}_m - i\hbar(\delta_{ks}\delta_{nl} - \delta_{kn}\delta_{ls})\hat{r}_l\hat{p}_s && \text{(4.8е)}\\
&= i\hbar(\hat{r}_k\hat{p}_n - \delta_{kn}\hat{r}_m\hat{p}_m) - i\hbar(\hat{r}_n\hat{p}_k - \delta_{kn}\hat{r}_s\hat{p}_s) && \text{(4.8ж)}\\
&= i\hbar[\hat{r}_k, \hat{p}_n]. && \text{(4.8з)}
\end{aligned}$$

Сега пресмятаме дясната страна на формула (4.7):

$$i\hbar\varepsilon_{knm}\hat{L}_m = i\hbar\varepsilon_{knm}\varepsilon_{mjl}r_jp_l = i\hbar(\delta_{kj}\delta_{nl} - \delta_{kl}\delta_{nj})r_jp_l = i\hbar(r_kp_n - r_np_k) = i\hbar[r_k, p_n], \tag{4.9}$$

с което формула (4.7) е доказана.

За удобство оттук нататък ще работим не с оператора $\hat{\mathbf{L}}$, а с оператора $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hbar\hat{\mathbf{J}}. \tag{4.10}$$

За неговите компоненти, използвайки формула (4.7), получаваме:

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_n] = i\varepsilon_{knm}\hat{J}_m. \tag{4.11}$$

Комутационното съотношение (4.11) показва, че компонентите на ъгловия момент $\hat{J}_k$ (както и тези на момента на импулса $\hat{L}_k$) не могат да се измерят (т.е. да имат определени стойности) едновременно.

Важна роля в квантовата механика играе операторът на *квадрата на ъгловия момент*:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{3} \hat{J}_k^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2. \tag{4.12}$$

Лесно се вижда, че операторът $\hat{\mathbf{J}}^2$ удовлетворява следното комутационно съотношение:

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_k] = 0. \tag{4.13}$$

Наистина,

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_1] = [\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2, \hat{J}_1] = [\hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2, \hat{J}_1] = [\hat{J}_2^2, \hat{J}_1] + [\hat{J}_3^2, \hat{J}_1], \tag{4.14}$$

понеже $[\hat{J}_1^2, \hat{J}_1] = 0$. Имаме от формула (4.11), че $\hat{J}_1\hat{J}_2 - \hat{J}_2\hat{J}_1 = i\hat{J}_3$ и $\hat{J}_3\hat{J}_1 - \hat{J}_1\hat{J}_3 = i\hat{J}_2$; следователно

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_2^2, \hat{J}_1] &= \hat{J}_2\hat{J}_2\hat{J}_1 - \hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_2 = \hat{J}_2(\hat{J}_1\hat{J}_2 - i\hat{J}_3) - (\hat{J}_2\hat{J}_1 + i\hat{J}_3)\hat{J}_2 = -i(\hat{J}_2\hat{J}_3 + \hat{J}_3\hat{J}_2),\\
[\hat{J}_3^2, \hat{J}_1] &= \hat{J}_3\hat{J}_3\hat{J}_1 - \hat{J}_1\hat{J}_3\hat{J}_3 = \hat{J}_3(\hat{J}_1\hat{J}_3 + i\hat{J}_2) - (\hat{J}_3\hat{J}_1 - i\hat{J}_2)\hat{J}_3 = i(\hat{J}_2\hat{J}_3 + \hat{J}_3\hat{J}_2).
\end{aligned}$$

Оттук желаната формула (4.13) следва веднага.

Оператори $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$

Важна роля в теорията на ъгловия момент играят операторите

$$\hat{J}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_1 + i\hat{J}_2), \qquad \hat{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2). \tag{4.15}$$

Тези оператори не са ермитови, но поради това, че $\hat{\mathbf{J}}$ е ермитов (както и компонентите му), то $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ са ермитово спрегнати един на друг:

$$(\hat{J}_-)^\dagger = \hat{J}_+, \qquad (\hat{J}_+)^\dagger = \hat{J}_-. \tag{4.16}$$

Нека да пресметнем произведенията на $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+\hat{J}_- &= \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) = \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2]) = \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3)\\
&= \tfrac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3), && (4.17\text{а})\\
\hat{J}_-\hat{J}_+ &= \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 + i\hat{J}_2) = \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + i[\hat{J}_1, \hat{J}_2]) = \tfrac{1}{2}(\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 - \hat{J}_3)\\
&= \tfrac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3). && (4.17\text{б})
\end{aligned}$$

От последните резултати следва веднага, че

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}_3. \tag{4.18}$$

От дефинициите (4.15) на $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ и от формула (4.13) следва веднага, че

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_+] = 0, \qquad [\hat{J}^2, \hat{J}_-] = 0. \tag{4.19}$$

Използвайки формула (4.7), намираме

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{J}_3, \hat{J}_1 + i\hat{J}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{J}_3, \hat{J}_1] + \frac{1}{\sqrt{2}}i[\hat{J}_3, \hat{J}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}i\hat{J}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{J}_1 = \hat{J}_+, \tag{4.20а}$$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_-] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{J}_3, \hat{J}_1 - i\hat{J}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{J}_3, \hat{J}_1] - \frac{1}{\sqrt{2}}i[\hat{J}_3, \hat{J}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}i\hat{J}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{J}_1 = -\hat{J}_-. \tag{4.20б}$$

Собствени стойности и собствени вектори на $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{J}_3$

Формула (4.13) означава, че стойностите на квадрата на ъгловия момент и коя да е от неговите компоненти могат да се измерят едновременно. Обикновено се избира третата компонента $\hat{J}_3 \equiv \hat{J}_z$. Операторите $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{J}_3$ имат обща система от собствени вектори, които ще означим с $|J,m\rangle$:

$$\hat{\mathbf{J}}^2|J,m\rangle = J^2|J,m\rangle, \qquad \hat{J}_3|J,m\rangle = m|J,m\rangle. \tag{4.21}$$

Собствените стойности на $\hat{\mathbf{J}}^2$ са означени с J^2, а тези на $\hat{J}_3$ с m. Тези собствени стойности са реални, понеже съответните оператори са ермитови. Както собствените стойности на квадрата на всеки ермитов оператор, собствената стойност на $\hat{\mathbf{J}}^2$ е неотрицателна (положителна или нула) и затова е означена с J^2. Собствената стойност m на $\hat{J}_3$ може да е както положителна, така и отрицателна или нула.

Свойство 1. Изпълнено е неравенството

$$m^2 \leqq J^2. \tag{4.22}$$

Доказателство. Използваме формули (4.12) и (4.21) и намираме:

$$\begin{aligned} J^2 - m^2 &= \langle J,m|(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3^2)|J,m\rangle = \langle J,m|(\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2)|J,m\rangle \\ &= \langle J,m|\hat{J}_1^2|J,m\rangle + \langle J,m|\hat{J}_2^2|J,m\rangle \geqq 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

понеже собствените стойности на *квадрата* на всеки ермитов оператор са неотрицателни.

Свойство 2. Операторът $\hat{J}_+$ повишава собствената стойност на $\hat{J}_3$ с единица, а операторът $\hat{J}_-$ я намалява с единица:

$$\hat{J}_+|J,m\rangle = C_+|J,m+1\rangle, \qquad \hat{J}_-|J,m\rangle = C_-|J,m-1\rangle. \tag{4.24}$$

където $C_\pm$ са константи.

Доказателство. Прилагаме оператора $\hat{J}_3$ върху $(\hat{J}_+|J,m\rangle)$ и $(\hat{J}_-|J,m\rangle)$:

$$\hat{J}_3(\hat{J}_+|J,m\rangle) = (\hat{J}_+\hat{J}_3 + \hat{J}_+)|J,m\rangle = (m+1)(\hat{J}_+|J,m\rangle), \tag{4.25а}$$
$$\hat{J}_3(\hat{J}_-|J,m\rangle) = (\hat{J}_-\hat{J}_3 - \hat{J}_-)|J,m\rangle = (m-1)(\hat{J}_-|J,m\rangle). \tag{4.25б}$$

Следователно $\hat{J}_+|J,m\rangle$ е собствен вектор на $\hat{J}_3$ със собствена стойност $m+1$, а $\hat{J}_-|J,m\rangle$ е собствен вектор на $\hat{J}_3$ със собствена стойност $m-1$, формули (4.24).

От тези свойства на операторите $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ следва веднага, че

$$\hat{J}_+|J,m_{\max}\rangle = 0, \tag{4.26а}$$
$$\hat{J}_-|J,m_{\min}\rangle = 0. \tag{4.26б}$$

Действаме на първото равенство с $\hat{J}_-$, а на второто с $\hat{J}_+$ и намираме

$$\begin{aligned} 0 = \hat{J}_-\hat{J}_+|J,m_{\max}\rangle = \tfrac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3)|J,m_{\max}\rangle = \tfrac{1}{2}(J^2 - m_{\max}^2 - m_{\max})|J,m_{\max}\rangle, \\ 0 = \hat{J}_+\hat{J}_-|J,m_{\min}\rangle = \tfrac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3)|J,m_{\min}\rangle = \tfrac{1}{2}(J^2 - m_{\min}^2 + m_{\min})|J,m_{\min}\rangle, \end{aligned}$$

откъдето получаваме

$$J^2 - m_{\max}^2 - m_{\max} = 0, \tag{4.27а}$$
$$J^2 - m_{\min}^2 + m_{\min} = 0. \tag{4.27б}$$

Нека означим максималната стойност на m с j; тогава получаваме

$$m_{\max} = j, \tag{4.28а}$$
$$J^2 = j(j+1), \tag{4.28б}$$
$$m_{\min} = -j. \tag{4.28в}$$

(Уравнението $j(j+1)-m_{\min}^2+m_{\min}=0$ има решения $m_{\min}=-j$ и $m_{\min}=j+1$, второто от които е невъзможно, понеже нарушава условието $m_{\min} \leqq m_{\max} = j$.) И така, получаваме следния интервал от възможни стойности на проекцията на ъгловия момент:

$$-j = m_{\min} \leqq m \leqq m_{\max} = j. \tag{4.29}$$

Нека сега се върнем към формули (4.24) и да определим константите C_+ и C_-. Използваме формули (4.16), от които следва, че

$$\hat{J}_+|j,m\rangle = C_+|j,m+1\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle j,m|\hat{J}_- = C_+^*\langle j,m+1|. \tag{4.30}$$

Умножаваме двете равенства и използваме свойства (4.17) и условието за нормираност на функцията $|j,m+1\rangle$:

$$|C_+|^2 = \langle j,m|\hat{J}_-\hat{J}_+|j,m\rangle = \langle j,m|\tfrac{1}{2}(\hat{J}^2-\hat{J}_3^2-\hat{J}_3)|j,m\rangle = \tfrac{1}{2}(j^2+j-m^2-m) \tag{4.31}$$
$$= \tfrac{1}{2}(j-m)(j+m+1). \tag{4.32}$$

Аналогично намираме, че

$$|C_-|^2 = \tfrac{1}{2}(j+m)(j-m+1). \tag{4.33}$$

И така, действието на операторите $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ има вида

$$\hat{J}_+|j,m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j-m)(j+m+1)}\ |j,m+1\rangle, \tag{4.34а}$$
$$\hat{J}_-|j,m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}\ |j,m-1\rangle. \tag{4.34б}$$

Свойство 3. j е или цяло, или полуцяло число.

Доказателство. Нека k е това цяло положително число или нула, за което

$$k \leqq 2j < k+1. \tag{4.35}$$

Действаме k пъти с оператора $\hat{J}_-$ върху състояние $|j,m_{\max}\rangle \equiv |j,j\rangle$:

$$\hat{J}_-^k|j,j\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}2j.1}\ \hat{J}_-^{k-1}|j,j-1\rangle \tag{4.36а}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}2j.1}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}(2j-1).2}\ \hat{J}_-^{k-2}|j,j-2\rangle = \cdots \tag{4.36б}$$
$$= 2^{-k/2}\sqrt{2j(2j-1)\cdots(2j-k+1)}\sqrt{1.2....k}\ |j,j-k\rangle \tag{4.36в}$$
$$= 2^{-k/2}\sqrt{\frac{(2j)!k!}{(2j-k)!}}\ |j,j-k\rangle. \tag{4.36г}$$

Съгласно дефиницията на k (4.35) имаме $j-k \geqq -j \equiv m_{\min}$ и следователно състояние $|j,j-k\rangle$ съществува. Нека подействаме на това състояние с $\hat{J}_-$:

$$\hat{J}_-|j,j-k\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(2j-k)(k+1)}\ |j,j-k-1\rangle = 0, \tag{4.37}$$

понеже $j-k-1 < -j \equiv m_{\min}$, което означава, че това състояние $|j, j-k-1\rangle$ е невъзможно. Следователно $2j - k = 0$ или

$$2j = k. \tag{4.38}$$

Понеже k е цяло неотрицателно число, последното условие означава, че j може да е цяло или полуцяло положително число или нула:

$$j = 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ \tfrac{5}{2},\ 3,\ \ldots \tag{4.39}$$

Възможните стойности на проекцията на ъгловия момент са

$$m = -j,\ -j+1,\ -j+2,\ \ldots,\ j-1,\ j. \tag{4.40}$$

т.е. $2j+1$ на брой. За първите няколко стойности на j имаме:

$$\begin{array}{ll} j = 0, & m = 0; \\ j = \frac{1}{2}, & m = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}; \\ j = 1, & m = -1,\ 0,\ 1; \\ j = \frac{3}{2}, & m = -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}; \\ j = 2, & m = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2; \\ \ldots & \end{array}$$

В заключение, за разлика от класическата механика, в квантовата механика:

- дължината на момента на импулса може да приема само дискретни стойности $\hbar\sqrt{j(j+1)}$, където $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$;
- проекцията на момента на импулса върху произволна ос на квантуване може да приема само $2j+1$ дискретни стойности $m = -j, -j+1, \ldots, j$.

Матрично представяне: пример с $j = 1$

От формули (4.34) следва, че в базиса от собствените функнции $|j, m\rangle$ на $\hat{J}_3$ и $\hat{\mathbf{J}}^2$ имаме

$$\langle j, m|\hat{J}_+|j, m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j-m)(j+m+1)}\langle j, m|j, m+1\rangle = 0, \tag{4.41а}$$

$$\langle j, m|\hat{J}_+|j, m-1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j-m+1)(j+m)}\langle j, m|j, m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j-m+1)(j+m)}, \tag{4.41б}$$

$$\langle j, m|\hat{J}_-|j, m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}\langle j, m|j, m-1\rangle = 0, \tag{4.42а}$$

$$\langle j, m|\hat{J}_-|j, m+1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j+m+1)(j-m)}\langle j, m|j, m\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}(j+m+1)(j-m)}. \tag{4.42б}$$

$\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ се намират от $\hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$ и $\hat{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i(\hat{J}_- - \hat{J}_+)$. От друга страна, $\hat{J}_3$ и $\hat{\mathbf{J}}^2$ очевидно са диагонални в своя базис:

$$\langle j, m|\hat{J}_3|j, m'\rangle = m\delta_{mm'}, \qquad \langle j, m|\hat{\mathbf{J}}^{\mathbf{2}}|j, m'\rangle = j(j+1)\delta_{mm'}. \tag{4.43}$$

За $j = 1$ получаваме матриците (с размерност $2j + 1 = 3$):

$$J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.44а}$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.44б}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{4.44в}$$

където номерацията на редовете и стълбовете е според стойността на $m = -1, 0, 1$.