Глава 4

Ъглов момент

4.4 Магнитен момент

Магнитен векторен потенциал

Да разгледаме частица с маса m и заряд Ze, където e е абсолютната стойност на заряда на електрона, а числото Z отразява спецификата на частицата: $Z = -1$ за електрона, $Z = +1$ за протона и т.н. Да предположим, че тази частица е поставена в хомогенно магнитно поле с магнитен интензитет $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Функцията на Хамилтон за такава система в калсическата електродинамика има вида

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{Ze}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{4.1}$$

където c е скоростта на светлината, а $\mathbf{A}$ е векторният магнитен потенциал.

Векторният потенциал на магнитното поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ е много удобна величина за описание на магнитното поле в класическата електродинамика. Неговото съществуване следва от *закона на Гаус за магнитното поле* (който предствлява *един от законите на Максуел*):

$$\mathrm{div}\mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \nabla.\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \tag{4.2}$$

От този закон следва *теоремата на Хелмхолц*, според която съществува такава векторна функция $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, за която

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{4.3}$$

Наистина, имаме $\nabla.\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla.\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla, \nabla, \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$, понеже всяко смесено произведение с два еднакви члена е равно на нула.

От класическата електродинамика е известно, че векторният потенциал е определен с точност до събираемо $\nabla\lambda(\mathbf{r})$. С други думи, двата векторни потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\lambda(\mathbf{r}) \tag{4.4}$$

са физически неразличими, т.е. водят до един и същ магнитен интензитет:

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla\lambda(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}), \tag{4.5}$$

понеже $\nabla \times \nabla\lambda(\mathbf{r}) = 0$. Трансформацията (4.4) се нарича калибровъчно преобразуване. Може да се покаже, че това калибровъчно преобразуване, направено в уравнението на

Шрьодингер, води само до (ненаблюдаемо) фазово отместване на вълновата функция, т.е., ако решението на уравнението на Шрьодингер за векторен потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ е $\Psi(\mathbf{r})$, то решението за векторен потенциал $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ е

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\lambda(\mathbf{r})\right], \tag{4.6}$$

което не води до промяна на плътността на вероятността: $|\Psi'(\mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{r})|^2$.

Възползвайки се от калибровъчната инвариантност (4.4) на векторния потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, налагаме *Кулоновата калибровка*:

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \nabla.\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{4.7}$$

В случая на постоянно магнитно поле ($\mathbf{H} = \mathrm{const}$) векторният потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ е

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}. \tag{4.8}$$

Лесно се проверява, че

$$\nabla \times (\tfrac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}(\nabla.\mathbf{r})\mathbf{H} - \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}.\mathbf{H}) = \mathbf{H}, \tag{4.9}$$

понеже $\nabla.\mathbf{r} = 3$ и $\frac{\partial}{\partial r_i} r_j = \delta_{ij}$, както и че изразът (4.8) удовлетворява Кулоновата калибровка (4.7):

$$\nabla.\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\nabla.\mathbf{H} \times \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\sum_{l,m,n} B_m \varepsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial r_l} r_n = \tfrac{1}{2}\sum_m B_m \sum_{l,n} \varepsilon_{lmn}\delta_{ln} = 0, \tag{4.10}$$

понеже във втората сума имаме произведение на симетричния символ на Кронекер δ_{ln} и антисиметричния символ на Леви-Чивита ε_{lmn}.

Оператор на магнитния момент

Използвайки принципа на съответствието, заменяме физичните променливи с оператори и намираме за Хамилтониана (4.1) израза

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left[\widehat{\mathbf{p}}^2 - \frac{Ze}{c}\left(\widehat{\mathbf{p}}.\widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{A}}.\widehat{\mathbf{p}}\right) + \frac{Z^2e^2}{c^2}\widehat{\mathbf{A}}^2\right], \tag{4.11}$$

Нека да пресметнем действието на оператора $\widehat{\mathbf{p}}.\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) + \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}$ върху произволна функция на координатата, като отчитаме явния вид на операторите на координатата $\widehat{\mathbf{r}}$ и импулса $\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\widehat{\nabla}$:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{\mathbf{p}}.\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) + \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}\right]\psi(\mathbf{r}) &= \widehat{\mathbf{p}}.\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}) \\ &= \psi(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{p}}.\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}) = 2\mathbf{A}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{4.12}$$

където сме използвали Кулоновата калибровка (4.7). Като използваме явния вид на магнитния потенциал (4.8), намираме

$$2\mathbf{A}(\mathbf{r}).\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{H} \times \mathbf{r}.\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{H}.\mathbf{r} \times \widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{H}.\widehat{\mathbf{L}}, \tag{4.13}$$

където $\widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \widehat{\mathbf{p}}$ е операторът на момента на импулса. Тогава Хамилтонианът (4.11) приема вида

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}.\mathbf{H} + \frac{Z^2 e^2}{8mc^2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r})^2, \tag{4.14}$$

където

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{Ze}{2mc}\widehat{\mathbf{L}} \tag{4.15}$$

е магнитният момент на частицата, който е пропорционален на момента на импулса $\widehat{\mathbf{L}}$.

По аналогия с класическата физика в квантовата механика на всяка частица се съпоставя оператор на *орбиталния магнитен момент*:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l = \frac{Z\hbar e}{2mc}\widehat{\mathbf{l}}, \tag{4.16}$$

където $\widehat{\mathbf{l}} = \widehat{\mathbf{L}}/\hbar$. Константата

$$\mu = \frac{\hbar e}{2mc} \tag{4.17}$$

се нарича *магнетон на Бор* в случая на електрон, $\mu_B = \hbar e/2m_e c$, и *ядрен магнетон* в случая на протон, $\mu_N = \hbar e/2m_p c$.

Операторът (4.16) се записва и във вида

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l = g_l \mu \widehat{\mathbf{l}}, \tag{4.18}$$

където g_l се нарича *орбитално жиромагнитно отношение* (или орбитален g-фактор). Очевидно $g_l = Z$ и следователно

$$g_l = \begin{cases} -1 & \text{за електрона,} \\ +1 & \text{за протона,} \\ 0 & \text{за неутрона.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Енергията на взаимодействието на орбиталния магнитен момент $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l$ с хомогенно магнитно поле $\mathbf{H}$ е

$$\widehat{H}_l = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l.\mathbf{H}. \tag{4.20}$$

По същия начин се построява операторът на *спиновия магнитен момент*:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = g_s \mu \widehat{\mathbf{s}}, \tag{4.21}$$

където g_s се нарича *спиново жиромагнитно отношение* (или спинов g-фактор). Той определя големината на енергията на взаимодействието на спиновия магнитен момент $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s$ с хомогенното магнитно поле $\mathbf{H}$:

$$\widehat{H}_s = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s.\mathbf{H}. \tag{4.22}$$

Експериментално са измерени следните стойности на спиновия g-фактор:

$$g_s = \begin{cases} -2 & \text{за електрона,} \\ 5.586 & \text{за протона,} \\ -3.826 & \text{за неутрона.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Важно е за отбелязване, че неутронът има нулев електричен заряд (оттук и името му!), но ненулев спинов магнитен момент! Стойността на g-фактора на електрона се предсказва от *релативистичната квантова механика* създадена от Дирак. Истинската стойност на g-фактора на електрона е -2.00231930436 и тя се предсказва коректно от *квантовата електродинамика.*

Векторната сума на орбиталния и спиновия магнитен момент дава *пълния магнитен момент* на частицата:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}_l + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = g_l \mu \widehat{\mathbf{l}} + g_s \mu \widehat{\mathbf{s}}. \tag{4.24}$$

Понеже орбиталният и спиновият g-фактори са различни за всички елементарни частици (електрона, протона, неутрона и всички останали), то пълният магнитен момент *не е пропорционален* на оператора на пълния ъглов момент $\widehat{\mathbf{j}} = \widehat{\mathbf{l}} + \widehat{\mathbf{s}}$, т.е. $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \neq \mathrm{const}.\widehat{\mathbf{j}}\,!$

Пълната енергия на взаимодействието на магнитния момент на частицата $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ с хомогенно магнитно поле $\mathbf{H}$ е

$$\widehat{H} = \widehat{H}_l + \widehat{H}_s = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}.\mathbf{H}. \tag{4.25}$$

Прецесия на спин в магнитно поле

Да разгледаме частица със спин s, намираща се в хомогенно магнитно поле $\mathbf{H}$. Избираме координатната система така, че оста z да е насочена по посоката на $\mathbf{H}$, т.е. $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Игнорираме механичното движение на частицата и се интересуваме само от поведението на спина (*прецесията* му), който взаимодейства с магнитното поле посредством своя магнитен момент $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$. Енергията на това взаимодействие е:

$$\widehat{H}_s = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s.\mathbf{H} = \mu_B H \widehat{s}_z. \tag{4.26}$$

Следователно собствените вектори на $\widehat{H}_s$ съвпадат със собствените вектори $|s, m_s\rangle$ на $\widehat{s}_z$, където съответните собствени стойности на $\widehat{\mathbf{s}}^2$ и $\widehat{s}_z$ са указани в кет-векторите $|s, m_s\rangle$. За спин $s = \frac{1}{2}$ това са спинорните вектори

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

където $|\uparrow\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ и $|\downarrow\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. В тези спинови състояния енергията на взаимодействието е

$$\langle\uparrow|\widehat{H}_s|\uparrow\rangle = \mu_B H, \qquad \langle\downarrow|\widehat{H}_s|\downarrow\rangle = -\mu_B H, \tag{4.28}$$

като "посоката" на спина не се изменя с времето.

Нека в момента $t = 0$ спинът е "насочен" по оста x, т.е. вълновата функция на спина е равна на собствената функция на проекцията $\widehat{s}_x$:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |s = \tfrac{1}{2}, s_x = \tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Понеже това състояние е собствено на $\widehat{s}_x$, а хамилтонианът (4.26) е пропорционален на $\widehat{s}_z$, то следва, че $\widehat{s}_x$ не комутира с $\widehat{H}_s$ и следователно векторът (4.29) не е стационарно състояние.

За да намерим еволюцията на това спиново състояние, търсим решението във вида (известен като *представяне на взаимодействието*)

$$|\Psi(t)\rangle = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B Bt/\hbar} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B Bt/\hbar} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

Определяме константите a и b от началното условие (4.29): $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Константата

$$\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar} = \frac{eB}{2m_e c} \tag{4.31}$$

има размерност на честота и характеризира големината на взаимодействието между спина и магнитното поле; тя е известна като "Ларморова честота" в класическата електродинамика. По този начин намираме

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Съгласно резултатите в предишната тема средните стойности на проекциите на спина в произволно спиново състояние, т.е.

$$|\chi\rangle = \begin{bmatrix} e^{i\alpha}\cos\xi \\ e^{i\beta}\sin\xi \end{bmatrix}, \tag{4.33}$$

са

$$\overline{s}_x = \frac{\hbar}{2}\sin 2\xi\cos(\alpha-\beta), \qquad \overline{s}_y = \frac{\hbar}{2}\sin 2\xi\sin(\alpha-\beta), \qquad \overline{s}_z = \frac{\hbar}{2}\cos 2\xi. \tag{4.34}$$

Следователно за състоянието (4.32) имаме $\beta = -\alpha = \omega t$, $\xi = \pi/4$. Средните стойности на спина в това състояние са

$$\overline{s}_x = \frac{\hbar}{2}\cos(2\omega t), \qquad \overline{s}_y = \frac{\hbar}{2}\sin(2\omega t), \qquad \overline{s}_z = 0. \tag{4.35}$$

Така стигаме до извода, че векторът на спина се "върти" във времето в равнината xy с постоянна честота 2ω. Тази честота е два пъти по-голяма от класическата Ларморова честота ω; разликата идва от g-фактора на електрона, $g_s = -2$.

Експеримент на Щерн и Герлах

Експериментът на Щерн и Герлах през 1922 г. има фундаментално историческо значение за развитието на квантовата физика. При него тесен колимиран (т.е. с успоредни надлъжни скорости) сноп частици с магнитен момент $\boldsymbol{\mu}$ преминава през *нехомогенно магнитно поле* $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Съгласно класическата електродинамика на всяка частица действа сила

$$\mathbf{F} = -\nabla H = \nabla[\mathbf{H}(\mathbf{r}).\boldsymbol{\mu}]. \tag{4.36}$$

Предполагаме, че $|H_x| \ll |H_z|$ и $|H_y| \ll |H_z|$, което означава, че магнитният момент, който прецесира около H_z, е насочен по оста z. Следователно усреднената сила е насочена също по z:

$$\mathbf{F} \approx [0, 0, \mu_z\frac{\partial H_z}{\partial z}]. \tag{4.37}$$

Това означава, че силата, отклоняваща частиците по оста z, е пропорционална на проекцията на магнитния момент на частиците по тази ос. Следователно нехомогенното магнитно поле отклонява частиците от първоначалната им ос на разпространение на ъгъл пропорционален на m_z, т.е. действа като филтър по m_z. За частици със спин $\frac{1}{2}$ (например електрони, протони или неутрони) магнитното поле разцепва първоначалния сноп на две части: едната със спин по $+z$ (spin-up, $|\uparrow\rangle$), а другата по $-z$ (spin-down, $|\downarrow\rangle$), като в случая z е оста на прибора на Щерн-Герлах. Очевидно, сноп от частици със спин s ще се разцепи на

$2s+1$ равноотдалечени компоненти, с проекции на спина по оста на прибора на Щерн-Герлах, както следва:

$$m_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s. \tag{4.38}$$

За частици с цял спин една от компонентите на разцепения сноп, тази с $m_z = 0$, не се отклонява от първоначалната си посока.

Класическата физика не е била в състояние да обясни това разцепване, което няколко години по-късно намира своето просто обяснение в рамките на квантовата механика.

Ото Щерн, асистент по теоретична физика, и Валтер Герлах, асистент по експериментална физика, извършват прочутия си експеримент със сребърни атоми през 1922 г. във Франкфурт. След идването на нацистите на власт Ото Щерн емигрира в САЩ, като работи в технологичния институт Карнеги (сега университет Карнеги-Мелон) в Питсбърг, а след това в Бъркли. Валтер Герлах остава в Германия и заема редица важни постове в управлението на науката както по времето на нацизма, така и след 1945 г. Той е един от участниците в екипа в нацистка Германия (Урановия клуб, Uranverein), разработвал атомно оръжие (заедно с Вернер Хайзенберг, Ото Хан и др. известни германски физици). През 1943 г. Ото Щерн получава Нобелова награда по физика, като в описанието на приносите му *липсва експериментът на Щерн-Герлах*, поради обвързването на Герлах с нацистите.

Експериментът на Щерн и Герлах, свързван в по-старата литература с *пространствено квантуване*, е един от най-важните физични експерименти на XX век, който води до редица важни развития в много области на квантовата физика. Експериментът е извършен няколко години преди холандците Уленбек и Гудсмит да направят хипотезата за съществуването на спина (1925 г.). Макар че експериментът на Щерн и Герлах води до откриването на спина, те го замислят като тест за старата квантова теория на Бор и Зомерфелд (планетарния модел на атома). Щерн и Герлах правят неправилното заключение, че експериментът потвърждава теорията на Бор и Зомерфелд за пространственото квантуване (т.е. квантуването на ъгловия момент), и правилното заключение, че той противоречи на класическата физика.

Някои от най-важните следствия от този експеримент са изброени по-долу.

- През следващите години, използвайки подобни апарати, учените откриват, че ядрата на повечето атоми също имат квантуван ъглов момент. Взаимодействието на ядрения спин със спина на електроните води до *свръхфиното разцепване на спектралните линии* на атомите.

- През 1937 г. Исидор Раби от Колумбийския университет в Ню Йорк демонстрира, че прилагането на променливо магнитно поле (както и радиочестотно поле) може да накара проекцията на магнитния момент да промени стойността си (т.е. да извърши преход между различни квантувани стойности). Така наречените *осцилации на Раби* поставят началото на нова област от физиката — *ядрения магнитен резонанс* — който по-късно прави революция в медицината. Раби получава Нобелова награда през 1945 г.

- Норман Рамзи от Харвард модифицира апарата на Раби, като въвежда две зони на взаимодействие, което повишава чувствителността на апаратурата с няколко порядъка. Тази техника води до създаването на *атомните часовници*. Рамзи получава Нобелова награда през 1989 г.

- Прякото наблюдение на спина е *най-директното доказателство за квантуването* в квантовата механика.
- Експериментът на Щерн и Герлах в днешно време е *парадигма в теорията на квантовото измерване* (квантовата томография).