Глава 3

Едномерни стационарни задачи

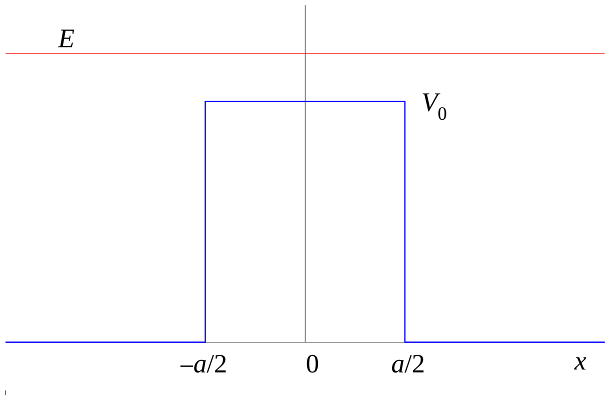
3.4 Правоъгълна потенциална бариера. Надбариерно отражение.

Да разгледаме правоъгълна потенциална бариера зададена с потенциалната енергия

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a/2, \\ V_0, & |x| \leqq a/2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Предполагаме, че енергията E е по-голяма от височината на бариерата V_0:

$$E > V_0. \tag{3.2}$$



Фигура 3.1: Потенциална бариера с ширина a и височина V_0. Енергията на частицата е по-голяма от V_0.

Решаваме стационарното едномерно уравнение на Шрьодингер:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \tag{3.3}$$

където

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \tag{3.4}$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\Psi(x) = 0. \tag{3.5}$$

Дефиницията на потенциала показва, че има три различни области на решението:

- област I: $x < -a/2$, в която $V(x) = 0$;
- област II: $-a/2 \leqq x \leqq a/2$, в която $V(x) = V_0$;
- област III: $x > -a/2$, в която $V(x) = 0$.

Стационарното уравнение на Шрьодингер в трите области има вида на вълново уравнение с различно вълново число:

$$\begin{aligned} &\text{област 1}: && \Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, && \text{(3.6а)}\\ &\text{област 2}: && \Psi''(x) + q^2\Psi(x) = 0, && \text{(3.6б)}\\ &\text{област 3}: && \Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, && \text{(3.6в)} \end{aligned}$$

където

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}, \qquad q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}, \qquad k^2 - q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0. \tag{3.7}$$

Решенията в различните области са суперпозиции от плоски вълни:

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, && \text{(3.8а)}\\ \psi_{II}(x) &= Ce^{iqx} + De^{-iqx}, && \text{(3.8б)}\\ \psi_{III}(x) &= Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. && \text{(3.8в)} \end{aligned}$$

Понеже няма отразена вълна от $+\infty$, то

$$G = 0. \tag{3.9}$$

Налагаме условията за непрекъснатост на вълновата функция и първата ѝ производна в точките $x = -a/2$ и $x = +a/2$, които имат следния вид:

$$\begin{aligned} \psi_I(-a/2) &= \psi_{II}(-a/2) && \text{(3.10а)}\\ \psi'_I(-a/2) &= \psi'_{II}(-a/2) && \text{(3.10б)}\\ \psi_{II}(a/2) &= \psi_{III}(a/2) && \text{(3.10в)}\\ \psi'_{II}(a/2) &= \psi'_{III}(a/2) && \text{(3.10г)} \end{aligned}$$

Заместваме с явния вид на функциите и намираме следната система от 4 уравнения:

$$\begin{aligned} Ae^{-ika/2} + Be^{ika/2} &= Ce^{-iqa/2} + De^{iqa/2}, && \text{(3.11а)}\\ kAe^{-ika/2} - kBe^{ika/2} &= qCe^{-iqa/2} - qDe^{iqa/2}, && \text{(3.11б)}\\ Ce^{iqa/2} + De^{-iqa/2} &= Fe^{ika/2}, && \text{(3.11в)}\\ qCe^{iqa/2} - qDe^{-iqa/2} &= kFe^{ika/2}. && \text{(3.11г)} \end{aligned}$$

Умножаваме уравнение (3.11а) с q и първо го събираме, а после изваждаме от уравнение (3.11б). По този начин изразяваме C и D чрез A и B:

$$Ce^{-iqa/2} = \frac{q+k}{2q}Ae^{-ika/2} + \frac{q-k}{2q}Be^{ika/2}, \tag{3.12а}$$

$$De^{iqa/2} = \frac{q-k}{2q}Ae^{-ika/2} + \frac{q+k}{2q}Be^{ika/2}. \tag{3.12б}$$

Умножаваме уравнение (3.11в) с q и го приравняваме с уравнение (3.11г):

$$kFe^{ika/2} = kCe^{iqa/2} + kDe^{-iqa/2} = qCe^{iqa/2} - qDe^{-iqa/2}, \tag{3.13}$$

откъдето намираме

$$(q+k)De^{-iqa/2} = (q-k)Ce^{iqa/2}. \tag{3.14}$$

Заместваме уравнения (3.12а) и (3.12б) в последното равенство и получаваме

$$(q+k)\left[(q-k)Ae^{-ika/2} + (q+k)Be^{ika/2}\right]e^{-iqa} = (q-k)\left[(q+k)Ae^{-ika/2} + (q-k)Be^{ika/2}\right]e^{iqa}, \tag{3.15}$$

откъдето намираме

$$(q^2-k^2)Ae^{-ika/2}\left[e^{-iqa} - e^{iqa}\right] = Be^{ika/2}\left[(q-k)^2e^{iqa} - (q+k)^2e^{-iqa}\right]. \tag{3.16}$$

Оттук получаваме:

$$\begin{aligned} \left|\frac{B}{A}\right| &= \frac{(k^2-q^2)\left|e^{-iqa} - e^{iqa}\right|}{|(q-k)^2e^{iqa} - (q+k)^2e^{-iqa}|} \\ &= \frac{2(k^2-q^2)|\sin(qa)|}{|2i(q^2+k^2)\sin(qa) - 4qk\cos(qa)|}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

където сме използвали тригонометричните формули $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$ и $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$. Оттук намираме коефициента на отражение $R = |B|^2/|A|^2$:

$$R = \frac{(k^2-q^2)^2\sin^2(qa)}{(q^2+k^2)^2\sin^2(qa) + 4q^2k^2\cos^2(qa)} \tag{3.18а}$$

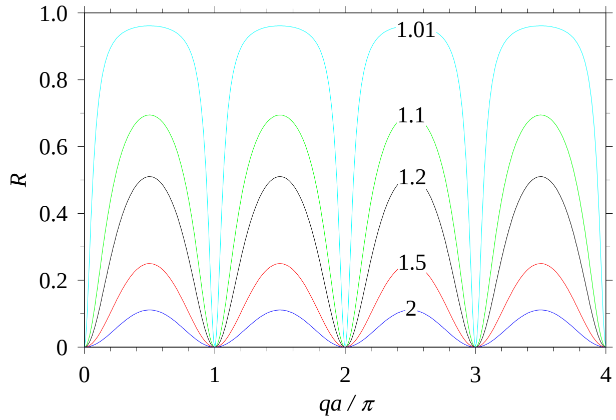
$$= \frac{(k^2-q^2)^2\sin^2(qa)}{4q^2k^2 + (k^2-q^2)^2\sin^2(qa)}, \tag{3.18б}$$

като за последното равенство сме използвали познатата формула $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Замествайки k и q с техните дефиниции (3.7), получаваме

$$R = \frac{\sin^2(qa)}{4\dfrac{E}{V_0}\left(\dfrac{E}{V_0} - 1\right) + \sin^2(qa)}. \tag{3.19}$$

Коефициентът на отражение R е показан на Фигура 3.2 като функция на ширината на бариерата a.

Следва анализ на зависимостите на коефициента R от ширината на бариерата a, височината на бариерата V_0, енергията на частицата E и нейната маса m.



Фигура 3.2: Коефициент на отражение R като функция на ширината на бариерата a (в единици π/q) за различни стойности на отношението E/V_0 (числата на кривите).

Ширина на бариерата a. Ширината на бариерата a участва в коефициента R чрез аргумента на синусите. При стойности

$$qa = n\pi \quad \Longrightarrow \quad R = 0! \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{3.20}$$

При тези стойности няма надбариерно отражение! При стойности

$$qa = (n + \tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{3.21}$$

коефициентът на отражение има максимална стойност

$$R_{\max} = \frac{1}{4\dfrac{E}{V_0}\left(\dfrac{E}{V_0} - 1\right) + 1}. \tag{3.22}$$

Ако енергията е близо до бариерата ($(E - V_0) \ll V_0$), то коефициентът на отражение може да достига стойности близки до 1:

$$R_{\max} \approx 1 - \frac{4(E - V_0)}{V_0}, \tag{3.23}$$

където сме използвали съотношението $1/(1 + x) \approx 1 - x$, което е валидно за $x \ll 1$.

Маса на частицата m. Масата m влиза единствено в q, като $q \propto \sqrt{m}$. Следователно за по-тежки частици аргументът на синусите във формула (3.19) е по-голям, което води до по-сгъстени осцилации. Масата не влияе на максималната стойност $R_{\max}$.

Височина на бариерата V_0 и енергия на частицата E. Коефициентът на отражение зависи по по-сложен начин от височината на бариерата V_0 и енергията на частицата E, понеже те влизат както явно, така и чрез q, т.е. тези параметри влияят както на амплитудата, така и на честотата на осцилациите. С нарастването на E максималната стойност (3.23) на коефициента на отражение намалява, понеже разстоянието $E - V_0$ също нараства. Обратно, с нарастването на V_0 коефициентът $R_{\max}$ нараства също, понеже разстоянието $E - V_0$ намалява. Честотата на осцилациите q, формула (3.7), очевидно нараства с E и намалява с V_0.