Квантова механика упражнения

Андон Рангелов, кабинет В 40, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница за задачите от семинарите http://course.quantum-bg.org

1 Стационарно уравнение на Шрьодингер с отчитане на времевата част на вълновата функция и не стационарно уравнение на Шрьодингер.

До сега разглеждахме стационарното уравнение на Шрьодингер

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

като търсихме собствените стойности E (възможните енергии) и собствените функции Ψ на Хамилтониана $\hat{H}$, без да се интересуваме от нестационарното уравнение на Шрьодингер:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi = \hat{H}\Psi$$

Нека сега да разгледаме отново случаят когато Хамилтониана не зависи явно от времето (стационарният случай), но да видим каква е времевата зависимост на вълновата функция. От предишните две уравнения имаме

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi = E\Psi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = -i\frac{E}{\hbar}dt \Rightarrow \Psi(t) = \Psi(0)\exp\left[-i\frac{E}{\hbar}t\right]$$

$\Rightarrow$ Вълновата функция в станционното състояние е периодична по времето. Ако Хамилтониана зависи явно от времето, то трябва да решаваме нестационарното уравнение на Шрьодингер (тоест трябва да решаваме направо $i\hbar\frac{d}{dt}\Psi = \hat{H}\Psi$).

1.1 Частица с маса m се намира в безкрайно дълбока потенциална яма с ширина a. В началният момент частицата има вълнов функция $\Psi(x, t = 0) = \frac{A}{4}\left(3\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right)$ намерете:

1.1.1
Вълновата функция на частицата в произволен момент от време.
1.1.2
След колко време T частицата, отново ще се намира в състояние с началната вълнова функция $\Psi = \frac{A}{4}\left(3\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right)$
1.1.3
Възможните стойности на енергията, който може да има частицата и с каква вероятност може да измерим тези стойности на енергията.
1.1.4
Средната стойност на енергията ($\bar{E} = \left\langle \hat{H} \right\rangle$)

1.2 Как се изменя с времето началната вълнова функция на двуатомна молекула, която се върти около ос минаваща през центъра на масите на молекулата, ако в началният момент вълновата функция на молекулата е $\Psi\left(\varphi, t=0\right) = A\sin^2\varphi$

1.3 Нека първоначално електрона се намира в основно състояние на атома, за който можем да разгледаме приближението, че има само две нива (основно ниво и възбудено). Нека вълновите функции на нивата са съответно Ψ_1 (за основното ниво) и Ψ_2 (за възбуденото ниво). Нека да свържем двете нива чрез лазерно взаимодействие, което взаимодействие се дава със следните матрични елементи на Хамилтониана $\left(\Psi_1, \hat{H}\Psi_1\right) = -\hbar\Delta$, $\left(\Psi_2, \hat{H}\Psi_2\right) = \hbar\Delta$ и $\left(\Psi_1, \hat{H}\Psi_2\right) = \left(\Psi_2, \hat{H}\Psi_1\right) = \hbar\Omega\left(t\right)$. Определете вероятността с която се намира електрона на основното състояние като функция на времето ако:

1.3.1
$\Delta = 0$, тоест лазерното поле има точно честотата на прехода от основно състояние до възбудено, това е така нареченият резонансен случай.
1.3.2
$\Delta \neq 0$ и $\Omega = const$ това е така нареченият модел на Раби.