

# Квантова механика упражнения

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница за задачите от семинарите  
course.quantum-bg.org

## I. ДЕЛТА ФУНКЦИЯ НА ДИРАК

### Делта символ на Кроникер

$\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$

$$\sum_i \delta_{ij} = 1, \quad \sum_i \delta_{ij} \lambda_i = \lambda_j$$

### Делта функция на Дирак

$\delta(x - a) = 0$  при  $x \neq a$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$  следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

### Функция на Хевисайт (стъпаловидна функция)

$\theta(x) = 0$  за  $x < 0$ ,  $\theta(x) = 1$  за  $x > 0$  и  $\theta(0) = 1/2$

#### Задачи:

A. Докажете че:

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$$

B. Докажете че

$\delta(x)$  е четна функция

B. Докажете че:

$$\begin{aligned} x\delta(x) &= 0 \\ \delta(ax) &= \delta(x) / |a| \\ f(x) \delta(x - a) &= f(a) \delta(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \delta(y - x') dy &= \delta(x - x') \end{aligned}$$

Г. Докажете че:

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|\varphi'_x(x_k)|}$$

където  $x_k$  са корени на  $\varphi(x) = 0$

Д. Намерете:

$$\begin{aligned}\delta(\sin(x)) &=? \\ \delta(\cos(x)) &=? \\ \delta(\ln(x)) &=?\end{aligned}$$

Е. Докажете че:

$$\begin{aligned}x\delta'(x) &= -\delta(x) \\ \delta_x^{(n)}(x) &= (-1)^n n! \frac{\delta(x)}{x^n}\end{aligned}$$

Ж. Докажете че:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-x^2/4\varepsilon)}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} &= \delta(x) \text{ ползвайки интеграла на Поасон } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} &= \delta(x) \text{ ползвайки интегралното равенство } \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\end{aligned}$$