Квантова механика упражнения

Андон Рангелов, кабинет B 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница за задачите от семинарите course.quantum-bg.org

I. ДЕЛТА ФУНКЦИЯ НА ДИРАК

II. МАТРИЦИ НА ПАУЛИ

Матриците $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ образуват базис в пространството на двумерните матрици. Тук σ_1, σ_2 и σ_3 са матрици на Паули.

Задачи:

A. Покажете че собствените вектори и собствените стойности на матриците на Паули σ_1, σ_2 и σ_3 са:

собствена стойност 1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и собствена стойност -1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ за σ_1
собствена стойност 1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ и собствена стойност -1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ за σ_2
собствена стойност 1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и собствена стойност -1 със собствен вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ за σ_3

Б. Докажете че:

$\sigma_\mu^+ = \sigma_\mu$ (ермитови оператори) за $\mu = 0, 1, 2, 3$
$\mathrm{Sp}\sigma_\mu = 2\delta_{\mu 0}$ за $\mu = 0, 1, 2, 3$
$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk}\sigma_0 + i\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\sigma_l$ където $j, k = 1, 2, 3$
$\sigma_\mu^{-1} = \sigma_\mu$ за $\mu = 0, 1, 2, 3$
$\mathrm{Sp}(\sigma_j\sigma_k) = 2\delta_{jk}$
$\mathrm{Sp}(\sigma_j\sigma_k\sigma_l) = 2i\varepsilon_{jkl}$
$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{pjk}\sigma_j\sigma_k \ = 2i\sigma_p$
$\mathrm{Sp}(\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m) = 2\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{km}\right)$
$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\sigma_l$
$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\ \sigma_0$

B. Докажете, че матриците на Паули образуват базис в (четири мерното) пространството на комплексните двумерни матрици: