Квантова механика упражнения

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница за задачите от семинарите course.quantum-bg.org

I. ЕРМИТОВИ ОПЕРАТОРИ, СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ДВА ВЕКТОРА

Bra вектора се дефинира като $\langle V| = \overrightarrow{V} = (V_1^*, V_2^*, V_3^*)$ a ket вектора се дефинира като $|U\rangle = \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ (нотацията идва от английската думичка за скоба "bracket")

Скаларното произведения на два вектора се дефинира като $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U} = (V_1^*, V_2^*, V_3^*) \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{3} V_l^* U_l = \langle V|U\rangle$.

За непрекъснатият случай имаме интегриране вместо сумиране $\langle\psi|\varphi\rangle = \int \psi^*(\xi, t)\, \varphi(\xi, t)\, d\xi$

Ако имаме следното скаларно произведение $\left\langle \psi|\hat{F}\varphi \right\rangle = \left\langle \hat{F}^\dagger\psi|\varphi \right\rangle$ то за оператора $\hat{F}^\dagger$ се казва, че е ермитово спрегнат на $\hat{F}$.

Ако $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$ казваме, че оператора е ермитов $\Rightarrow \left\langle \psi|\hat{F}\varphi \right\rangle = \left\langle \hat{F}\psi|\varphi \right\rangle$.

Ако $\hat{F}^\dagger = \hat{F}^{-1}$ казваме, че оператора е унитарен.

A. Ако операторите $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са линейни да се докаже, че:

.

1.1.1
$\hat{A}^\dagger$ е единствен (на всеки неособен оператор съответства един ермитово спрегнат оператор)

1.1.2
$\left(a\hat{A}\right)^\dagger = a^*\hat{A}^\dagger$

1.1.3
$\left(\hat{A} \pm \hat{B}\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger \pm \hat{B}^\dagger$

1.1.4
$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

1.1.5
$\left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1}$ доказва се като се ползва предишната подточка и се тръгне от единичният оператор $\hat{1}$

1.1.6
$\hat{A}\hat{A}^\dagger$ и $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ са ермитови оператори ($\left(\hat{A}\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger$ и $\left(\hat{A}^\dagger\hat{A}\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$)

Б. Ако операторите $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са линейни и ермитови да се докаже, че:

.

1.2.1
$\left(a\hat{A}\right)^\dagger = a^*\hat{A}$

1.2.2

$\left(\hat{A} \pm \hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{A} \pm \hat{B}$

1.2.3
$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}$ е ермитов ($\left(\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\right)^{\dagger} = \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}$)

1.2.4
$\frac{1}{i}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ е ермитов ($\left(\frac{1}{i}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right)^{\dagger} = \frac{1}{i}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$).

1.2.5
$\exp\left(i\hat{A}\right)$ е унитарен оператор (доказва се като развием в ред exp и ермитово спрегнем)

1.2.6
оператора $\hat{A}\hat{C}\hat{A}^{\dagger}$ е ермитов ($\left(\hat{A}\hat{C}\hat{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^{\dagger}$), където $\hat{C}$ е линеен оператор

B. Ако операторите $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са линейни и ермитови и ако:

.
1.3.1
$\hat{A}$ е неособен (съществува $\hat{A}^{-1}$) да се докаже, че $\hat{A}^{-1}$ е ермитов ($\left(\hat{A}^{-1}\right)^{\dagger} = \hat{A}^{-1}$).

1.3.2
$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ да се докаже, че $\hat{A}\hat{B}$ е ермитов ($\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{A}\hat{B}$)

1.3.3
$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ да се докаже, че $\left(\hat{A} + i\hat{B}\right)\left(\hat{A} - i\hat{B}\right)^{-1}$ е унитарен ($\left(\left(\hat{A} + i\hat{B}\right)\left(\hat{A} - i\hat{B}\right)^{-1}\right)^{\dagger} = \left(\left(\hat{A} + i\hat{B}\right)\left(\hat{A} - i\hat{B}\right)^{-1}\right)^{-}$