Глава 4

Ъглов момент

4.2 Събиране на ъглови моменти

Нека имаме два ъглови момента $\hat{\mathbf{J}}'$ и $\hat{\mathbf{J}}''$:

$$\hat{\mathbf{J}}' = (\hat{J}'_1, \hat{J}'_2, \hat{J}'_3), \qquad \hat{\mathbf{J}}'^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{3} \hat{J}'^2_k = \hat{J}'^2_1 + \hat{J}'^2_2 + \hat{J}'^2_3. \tag{4.1а}$$

$$\hat{\mathbf{J}}'' = (\hat{J}''_1, \hat{J}''_2, \hat{J}''_3), \qquad \hat{\mathbf{J}}''^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{3} \hat{J}''^2_k = \hat{J}''^2_1 + \hat{J}''^2_2 + \hat{J}''^2_3. \tag{4.1б}$$

Въпросът, на който ще намерим отговора тук, е: по какви правила се събират ъгловите моменти $\hat{\mathbf{J}}'$ и $\hat{\mathbf{J}}''$? С други думи, какви стойности може да заема пълният ъглов момент,

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}' + \hat{\mathbf{J}}'' \tag{4.2}$$

и неговата проекция $\hat{J}_3$?

Съгласно предишната тема, за всеки от ъгловите моменти $\hat{\mathbf{J}}'$ и $\hat{\mathbf{J}}''$ са в сила комутационните съотношения:

$$[\hat{J}'_k, \hat{J}'_l] = i\varepsilon_{kln}\hat{J}'_n, \qquad [\hat{\mathbf{J}}'^2, \hat{J}'_k] = 0, \tag{4.3а}$$

$$[\hat{J}''_k, \hat{J}''_l] = i\varepsilon_{kln}\hat{J}''_n, \qquad [\hat{\mathbf{J}}''^2, \hat{J}''_k] = 0, \tag{4.3б}$$

от които следва, че операторите:

$$\hat{\mathbf{J}}'^2|j', m'\rangle = J'^2|j', m'\rangle, \qquad J'_3|j', m'\rangle = m'|j', m'\rangle, \tag{4.4а}$$

$$\hat{\mathbf{J}}''^2|j'', m''\rangle = J''^2|j'', m''\rangle, \qquad J''_3|j'', m''\rangle = m''|j'', m''\rangle. \tag{4.4б}$$

където собствените стойности на операторите са

$$J'^2 = j'(j'+1), \qquad m' = -j',\ -j'+1,\ -j'+2,\ \ldots,\ j', \tag{4.5а}$$

$$J''^2 = j''(j''+1), \qquad m'' = -j'',\ -j''+1,\ -j''+2,\ \ldots,\ j''. \tag{4.5б}$$

Добавяме комутационното съотношение

$$[\hat{J}'_k, \hat{J}''_l] = 0, \tag{4.6}$$

което изразява факта, че операторите $\hat{\mathbf{J}}'$ и $\hat{\mathbf{J}}''$ действат върху различни пространства, или, казано по друг начин, са съставени от различни независими оператори $(\hat{\mathbf{r}}', \hat{\mathbf{p}}')$ и $(\hat{\mathbf{r}}'', \hat{\mathbf{p}}'')$. Оттук следва, че са изпълнени и равенствата

$$[\hat{\mathbf{J}}'^2, \hat{J}''_k] = 0, \qquad [\hat{\mathbf{J}}''^2, \hat{J}'_k] = 0. \tag{4.7}$$

Лесно се вижда, че за пълния ъглов момент $\hat{\mathbf{J}}$ са изпълнени съотношенията

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\varepsilon_{kln}\hat{J}_n, \qquad [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_k] = 0, \tag{4.8}$$

откъдето следва, че за пълния ъглов момент $\hat{\mathbf{J}}$ са изпълнени същите свойства на собствените стойности на квадрата и проекцията на $\hat{\mathbf{J}}$, както за всеки от съставящите го ъглови моменти:

$$\hat{\mathbf{J}}^2|J, m\rangle = J^2|j, m\rangle, \qquad \hat{J}_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle. \tag{4.9}$$

където

$$J^2 = j(j+1), \qquad m = -j,\ -j+1,\ -j+2,\ \ldots,\ j. \tag{4.10}$$

Въпросът сега е: как квантовите числа на пълния момент j и m се изразяват чрез тези на съставящите го моменти: j', j'', m' и m''.

Да разгледаме произведението от собствените функции на съставните оператори:

$$|j', m'; j'', m''\rangle = |j', m'\rangle|j'', m''\rangle. \tag{4.11}$$

Лесно се проверява, че това състояние е собствено на $\hat{J}_3$ със собствена стойност

$$m = m_1 + m_2. \tag{4.12}$$

Наистина,

$$\hat{J}_3|j', m'; j'', m''\rangle = (\hat{J}_3'|j', m'\rangle)|j'', m''\rangle + |j', m'\rangle(\hat{J}_3''|j'', m''\rangle) = (m' + m'')|j', m'; j'', m''\rangle, \tag{4.13}$$

понеже $\hat{J}_3'$ действа само на $|j', m'\rangle$, а $\hat{J}_3''$ само на $|j'', m''\rangle$. Очевидно, пълният брой състояния $|j', m'; j'', m''\rangle$ е

$$\text{брой състояния} = (2j' + 1)(2j'' + 1). \tag{4.14}$$

И така, намерихме каква е стойността на m при зададени m' m''. Едновременното съществуването на определени стойности на m, m' и m'' е следствие от факта, че съответните оператори комутират:

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_3'] = [\hat{J}_3, \hat{J}_3''] = 0, \tag{4.15}$$

което е директно следствие от формула (4.6).

Сега ще намерим какви стойности приема j при зададени j' и j''. От комутационните съотношения

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}'^2] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}''^2] = 0 \tag{4.16}$$

следва, че j, j' и j'' могат да имат едновременно определени стойности. Лесно е да се покаже, че и компонентата $\hat{J}_3$ комутира с $\hat{\mathbf{J}}'^2$ и $\hat{\mathbf{J}}''^2$:

$$[\hat{J}_3, \hat{\mathbf{J}}'^2] = [\hat{J}_3, \hat{\mathbf{J}}''^2] = 0. \tag{4.17}$$

От комутирането на операторите $\hat{\mathbf{J}}'^2$, $\hat{\mathbf{J}}''^2$, $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{J}_3$ всеки с всеки следва, че съответните собствени стойности

$$j',\ j'',\ j,\ m \tag{4.18}$$

могат да се измерят едновременно, а съответните оператори имат обща система от собствени функции $|j', j'', j, m\rangle$.

От друга страна, $\hat{\mathbf{J}}^2$ не комутира с проекциите $\hat{J}'_3$ и $\hat{J}''_3$:

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}'_3] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}''_3] \neq 0. \tag{4.19}$$

Например, понеже $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_k \hat{J}_k$ (по повтарящи се индекси сумираме!) и понеже съгласно формула (4.6) $\hat{J}'_k$ и $\hat{J}''_k$ комутират, имаме

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}'_3] &= [(\hat{\mathbf{J}}' + \hat{\mathbf{J}}'')^2, \hat{J}'_3] = [(\hat{\mathbf{J}}'^2 + \hat{\mathbf{J}}''^2 + 2\hat{J}'_k \hat{J}''_k), \hat{J}'_3] = 2[\hat{J}'_k, \hat{J}'_3]\hat{J}''_k \\ &= 2i\varepsilon_{k3n} \hat{J}'_n \hat{J}''_k = 2i(\hat{J}'_1 \hat{J}''_2 - \hat{J}'_2 \hat{J}''_1) \neq 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

където сме използвали и формули (4.7). Аналогично,

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}''_3] = 2i(\hat{J}''_1 \hat{J}'_2 - \hat{J}''_2 \hat{J}'_1) \neq 0. \tag{4.21}$$

Некомутирането на $\hat{\mathbf{J}}^2$ с проекциите $\hat{J}'_3$ и $\hat{J}''_3$ означава, че j, m' и m'' не могат едновременно да имат определени стойности, т.е. не могат да принадлежат към един и същ набор от квантови числа.

И така, имаме 2 набора от квантови числа, като числата във всеки набор могат да се измерят едновременно:

$$\text{набор 1:} \qquad j',\ m',\ j'',\ m''; \tag{4.22а}$$

$$\text{набор 2:} \qquad j',\ j'',\ j,\ m. \tag{4.22б}$$

Собствените функции на съответните набори от оператори,

$$\text{набор 1:} \qquad \hat{\mathbf{J}}'^2,\ \hat{J}'_3,\ \hat{\mathbf{J}}''^2,\ \hat{J}''_3; \tag{4.23а}$$

$$\text{набор 2:} \qquad \hat{\mathbf{J}}'^2,\ \hat{\mathbf{J}}''^2,\ \hat{\mathbf{J}}^2,\ \hat{J}_3, \tag{4.23б}$$

образуват два алтернативни базиса в едно и също Хилбертово пространство:

$$\text{набор 1:} \qquad |j', m', j'', m''\rangle; \tag{4.24а}$$

$$\text{набор 2:} \qquad |j', j'', j, m\rangle. \tag{4.24б}$$

Между двата базиса съществува трансформация, която преобразува единия в другия:

$$|j', j'', j, m\rangle = \sum C^{jm}_{j'm'j''m''}\, |j', m', j'', m''\rangle, \tag{4.25}$$

където коефициентите на трансформацията $C^{jm}_{j'm'j''m''}$ се наричат *коефициенти на Клебш-Гордон.*

Максимална стойност на j. Сега ще намерим как квантовото число j на пълния ъглов момент $\hat{\mathbf{J}}^2$ зависи от j' и j''. Първо ще покажем, че *максималната стойност* на j е $j' + j''$. Да допуснем, че $j > j' + j''$; тогава следва, че проекцията m може да приема стойност $m = j$, която е по-голяма от максималната стойност на сумата $m' + m''$, т.е. от $j' + j''$, което е невъзможно, понеже вече доказахме, че $m = m' + m''$. До аналогично противоречие достигаме, ако допуснем, че $j < j' + j''$; тогава пък максималната стойност на сумата $m' + m''$, т.е. $j' + j''$, би била недостижима за m. По този начин стигаме до извода, че

$$j_{\max} = j' + j'', \tag{4.26}$$

точно както бихме разсъждавали класически, ако събирахме скалари.

Минимална стойност на j. Сега ще определим *минималната стойност*, която може да приеме квантовото число j. Използваме факта, че броят на базисните състояния (размерността на Хилбертовото пространство) се дава с формула (4.14) и извършваме низходящо броене на броя състояния, съответстващи на всяка стойност на j:

ъглов момент	брой състояния
$j_{\max}$	$2j_{\max}+1$
$j_{\max}-1$	$2(j_{\max}-1)+1$
$\vdots$	
$j_{\min}$	$2j_{\min}+1$

Търсим $j_{\min}$ от условието броят на състоянията от $j_{\max}=j'+j''$ до $j_{\min}$ да е равен на този от формула (4.14):

$$\sum\nolimits_{j=j_{\min}}^{j_{\max}}(2j+1)=(2j'+1)(2j''+1). \tag{4.27}$$

Като използваме познатата формули от алгебрата

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} k=\tfrac{1}{2}n(n+1), \tag{4.28а}$$

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}(2k+1)=n(n+1)+n+1=(n+1)^2, \tag{4.28б}$$

намираме

$$\sum\nolimits_{j=j_{\min}}^{j_{\max}}(2j+1)=\sum\nolimits_{j=0}^{j_{\max}}(2j+1)-\sum\nolimits_{j=0}^{j_{\min}-1}(2j+1)=(j_{\max}+1)^2-j_{\min}^2, \tag{4.29}$$

откъдето

$$j_{\min}^2=(j'+j''+1)^2-(2j'+1)(2j''+1)=(j'-j'')^2. \tag{4.30}$$

Следователно

$$j_{\min}=|j'-j''|. \tag{4.31}$$

И така, стойностите, които може да приема квантовото число j на квадрата на оператора на пълния ъглов момент $\hat{\mathbf{J}}^2$, са

$$j_{\min}=|j'-j''|\leqq j\leqq j'+j''=j_{\max}. \tag{4.32}$$

Ако $j'\geqq j''$, то имаме

$$j=j'-j'',j'-j''+1,\ldots j'+j''. \tag{4.33}$$

Пример 1. Нека приложим изведеното правило за събиране на ъглови моменти за два момента $j'=j''=\frac{1}{2}$. Такъв ъглов момент е например спинът на електрона, протона, неутрона и някои други елементарни частици. Имаме две възможни стойности на сумарния ъглов момент

$$j=0,\qquad m=0\qquad \text{(синглетно състояние);} \tag{4.34а}$$

$$j=1,\qquad m=-1,0,1\qquad \text{(триплетно състояние).} \tag{4.34б}$$

Това обяснява спектъра на хелиевия атом, който съдържа 2 електрона, сумирането на спиновете на които води до разделянето на колективните състояния на синглетни и триплетни.

Пример 2. Нека имаме 2 ъглови момента: $j' = l$, където $l = 0, 1, 2, \ldots$, и $j'' = \frac{1}{2}$. Такава ситуация възниква в атомите, където всеки електрон има едновременно орбитален момент l и собствен момент (спин) $\frac{1}{2}$. Ако $l \geqq 1$, имаме две възможни стойности на пълния ъглов момент:

$$j = l - \tfrac{1}{2}, \qquad j = l + \tfrac{1}{2}. \tag{4.35}$$

Това обяснява разцепването на нивата (фината структура) за p $(l = 1)$, d $(l = 2)$, f $(l = 3)$ и т.н. електрони в спектрите на атомите. Ако $l = 0$ (s електрон), то нивото не се разцепва:

$$j = \tfrac{1}{2} \qquad (s \text{ електрон}). \tag{4.36}$$