

Глава 3

Едномерни стационарни задачи

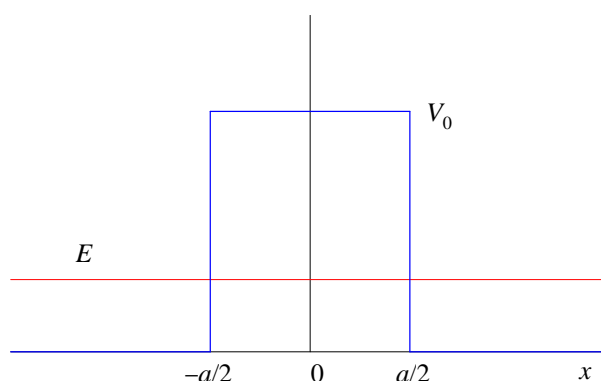
3.3 Правоъгълна потенциална бариера. Тунелен ефект.

Да разгледаме правоъгълна потенциална бариера, която се задава с потенциалната енергия

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a/2, \\ V_0, & |x| \leq a/2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Предполагаме, че енергията E е по-малка от височината на бариерата V_0 :

$$0 < E < V_0. \quad (3.2)$$



Фигура 3.1: Потенциална бариера с ширина a и височина V_0 . Енергията на частицата е по-малка от V_0 .

Решаваме стационарното едномерно уравнение на Шрьодингер:

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.3)$$

където

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (3.4)$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\Psi(x) = 0. \quad (3.5)$$

Дефиницията на потенциала (3.1) показва, че има три различни области на решението:

- област I: $x < -a/2$, в която $V(x) = 0$;
- област II: $-a/2 \leq x \leq a/2$, в която $V(x) = V_0$;
- област III: $x > a/2$, в която $V(x) = 0$.

Стационарното уравнение на Шрьодингер в трите области има вида на вълново уравнение с различно вълново число:

$$\text{област 1 : } \Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\text{област 2 : } \Psi''(x) - \varkappa^2\Psi(x) = 0, \quad (3.6б)$$

$$\text{област 3 : } \Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, \quad (3.6в)$$

където

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} > 0, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} > 0, \quad k^2 + \varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0. \quad (3.7)$$

Решенията в области I и III са суперпозиции от плоски вълни с вълново число k , докато решението в област II е сума от два експоненциални члена, нарастващ $e^{\varkappa x}$ и намаляващ $e^{-\varkappa x}$:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (3.8a)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\varkappa x} + De^{-\varkappa x}, \quad (3.8б)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. \quad (3.8в)$$

Понеже няма отразена вълна от $+\infty$ поради отсъствието на потенциал, то $G = 0$.

Преди да пристъпим към намирането на интеграционните константи A, B, C, D и F ще дефинираме коефициентите на отражение R (от “reflection”) и преминаване T (от “transmission”). Коефициентът на отражение R се дефинира като отношението на плътността на потока на отразената вълна Be^{-ikx} и тази на падащата вълна Ae^{ikx} , а коефициентът на преминаване T се дефинира като отношението на плътността на потока на преминалата вълна Fe^{ikx} и тази на падащата вълна Ae^{ikx} :

$$R = \frac{|j_B|}{|j_A|}, \quad T = \frac{|j_F|}{|j_A|}. \quad (3.9)$$

Припомняме, че плътността на потока за състояние $\Psi(x)$ се дефинира по следния начин:

$$j_\Psi = \frac{\hbar}{2mi} \left[\Psi^*(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) - \Psi(x) \frac{d}{dx} \Psi^*(x) \right]. \quad (3.10)$$

За потоците на падащата вълна Ae^{ikx} , отразената вълна Be^{-ikx} и преминалата вълна Fe^{ikx} намираме:

$$j_A(x) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2, \quad j_B(x) = -\frac{\hbar k}{m} |B|^2, \quad j_F(x) = \frac{\hbar k}{m} |F|^2. \quad (3.11)$$

Следователно коефициентите на отражение и преминаване се дават от

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \quad (3.12)$$

Налагаме условията за непрекъснатост на вълновата функция и първата ѝ производна в точките $x = -a/2$ и $x = +a/2$, които имат следния вид:

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2) \quad (3.13a)$$

$$\psi'_I(-a/2) = \psi'_{II}(-a/2) \quad (3.13б)$$

$$\psi_{II}(a/2) = \psi_{III}(a/2) \quad (3.13в)$$

$$\psi'_{II}(a/2) = \psi'_{III}(a/2) \quad (3.13г)$$

Заместваме с явния вид на функциите и намираме следната система от 4 уравнения:

$$Ae^{-ika/2} + Be^{ika/2} = Ce^{-\varkappa a/2} + De^{\varkappa a/2}, \quad (3.14a)$$

$$ikAe^{-ika/2} - ikBe^{ika/2} = \varkappa Ce^{-\varkappa a/2} - \varkappa De^{\varkappa a/2}, \quad (3.14б)$$

$$Ce^{\varkappa a/2} + De^{-\varkappa a/2} = Fe^{ika/2}, \quad (3.14в)$$

$$\varkappa Ce^{\varkappa a/2} - \varkappa De^{-\varkappa a/2} = ikFe^{ika/2}. \quad (3.14г)$$

Умножаваме уравнение (3.14a) с q и първо го събираме, а после изваждаме от уравнение (3.14б). По този начин изразяваме C и D чрез A и B :

$$2\varkappa Ce^{-\varkappa a/2} = (\varkappa + ik)Ae^{-ika/2} + (\varkappa - ik)Be^{ika/2}, \quad (3.15a)$$

$$2\varkappa De^{\varkappa a/2} = (\varkappa - ik)Ae^{-ika/2} + (\varkappa + ik)Be^{ika/2}, \quad (3.15б)$$

Умножаваме уравнение (3.14в) с ik и го приравняваме с уравнение (3.14г):

$$ikFe^{ika/2} = ikCe^{\varkappa a/2} + ikDe^{-\varkappa a/2} = \varkappa Ce^{\varkappa a/2} - \varkappa De^{-\varkappa a/2}, \quad (3.16)$$

откъдето намираме

$$(\varkappa - ik)Ce^{\varkappa a/2} = (\varkappa + ik)De^{-\varkappa a/2}. \quad (3.17)$$

Заместваме уравнения (3.15a) и (3.15б) в последното равенство и получаваме

$$(\varkappa - ik)[(\varkappa + ik)Ae^{-ika/2} + (\varkappa - ik)Be^{ika/2}]e^{\varkappa a} = (\varkappa + ik)[(\varkappa - ik)Ae^{-ika/2} + (\varkappa + ik)Be^{ika/2}]e^{-\varkappa a}, \quad (3.18)$$

откъдето намираме

$$B = A \frac{e^{-ika}(\varkappa^2 + k^2)[e^{\varkappa a} - e^{-\varkappa a}]}{(\varkappa + ik)^2 e^{-\varkappa a} - (\varkappa - ik)^2 e^{\varkappa a}}. \quad (3.19)$$

Оттук получаваме:

$$\begin{aligned} \left| \frac{B}{A} \right| &= \frac{(\varkappa^2 + k^2) |e^{\varkappa a} - e^{-\varkappa a}|}{|(\varkappa + ik)^2 e^{-\varkappa a} - (\varkappa - ik)^2 e^{\varkappa a}|} \\ &= \frac{2(\varkappa^2 + k^2) \sinh(\varkappa a)}{|2(k^2 - \varkappa^2) \sinh(\varkappa a) + 4ik\varkappa \cosh(\varkappa a)|}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

където сме използвали формулите $e^x - e^{-x} = 2 \sinh(x)$ и $e^x + e^{-x} = 2 \cosh(x)$. Оттук намираме коефициента на отражение $R = |B|^2/|A|^2$:

$$R = \frac{(k^2 + \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a)}{(k^2 - \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a) + 4k^2 \varkappa^2 \cosh^2(\varkappa a)} \quad (3.21a)$$

$$= \frac{(k^2 + \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a)}{(k^2 + \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a) + 4k^2 \varkappa^2}, \quad (3.21б)$$

$$= \frac{\sinh^2(\varkappa a)}{\sinh^2(\varkappa a) + \frac{4k^2 \varkappa^2}{(k^2 + \varkappa^2)^2}}, \quad (3.21в)$$

като сме използвали формулите $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ и $(k^2 - \varkappa^2)^2 + 4k^2 \varkappa^2 = (k^2 + \varkappa^2)^2$. Замествайки k и \varkappa с техните дефиниции (3.7), получаваме

$$R = \frac{\sinh^2(\varkappa a)}{\sinh^2(\varkappa a) + \frac{4E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}. \quad (3.22)$$

Константата F , която влиза в коефициента на преминаване T , се намира по подобен начин. Заместваме уравнения (3.15а) и (3.15б) в (3.14в) и получаваме

$$\begin{aligned} 2\varkappa F e^{ika} &= [(\varkappa + ik)A + (\varkappa - ik)B e^{ika}]e^{\varkappa a} + [(\varkappa - ik)A + (\varkappa + ik)B e^{ika}]e^{-\varkappa a} \\ &= 2\varkappa(A + B e^{ika}) \cosh(\varkappa a) + 2ik(A - B e^{ika}) \sinh(\varkappa a). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Имаме

$$A + B e^{ika} = A \frac{2k^2 \sinh(\varkappa a) + 2ik\varkappa \cosh(\varkappa a)}{(k^2 - \varkappa^2) \sinh(\varkappa a) + 2ik\varkappa \cosh(\varkappa a)}, \quad (3.24a)$$

$$A - B e^{ika} = A \frac{-2\varkappa^2 \sinh(\varkappa a) + 2ik\varkappa \cosh(\varkappa a)}{(k^2 - \varkappa^2) \sinh(\varkappa a) + 2ik\varkappa \cosh(\varkappa a)}. \quad (3.24б)$$

След заместване и преработване на израза получаваме

$$2\varkappa F e^{ika} = A \frac{4ik\varkappa^2}{(k^2 - \varkappa^2) \sinh(\varkappa a) + 2ik\varkappa \cosh(\varkappa a)} \quad (3.25)$$

Следователно коефициентът на преминаване T има следния вид:

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 \varkappa^2}{(k^2 - \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a) + 4k^2 \varkappa^2 \cosh^2(\varkappa a)} \quad (3.26a)$$

$$= \frac{4k^2 \varkappa^2}{(k^2 + \varkappa^2)^2 \sinh^2(\varkappa a) + 4k^2 \varkappa^2} \quad (3.26б)$$

Сравнението с формула (3.21б) показва веднага, че

$$R + T = 1. \quad (3.27)$$

Замествайки k и \varkappa с техните дефиниции (3.7), получаваме

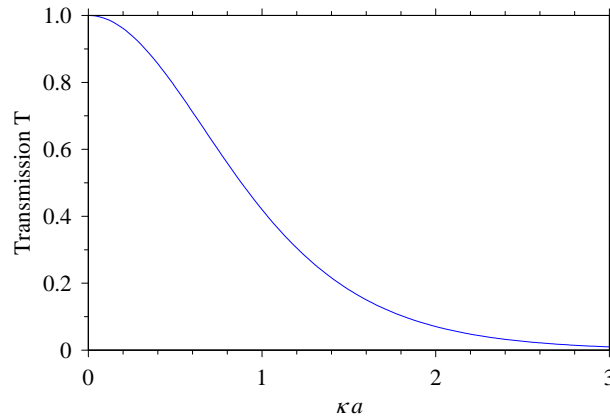
$$T = \frac{1}{\frac{V_0^2 \sinh^2(\varkappa a)}{4E(V_0 - E)} + 1}. \quad (3.28)$$

Коефициентът на преминаване T е показан на Фигура 3.2 като функция на ширината на бариерата a . Коефициентът T намалява монотонно при нарастването на ширината на бариерата a .

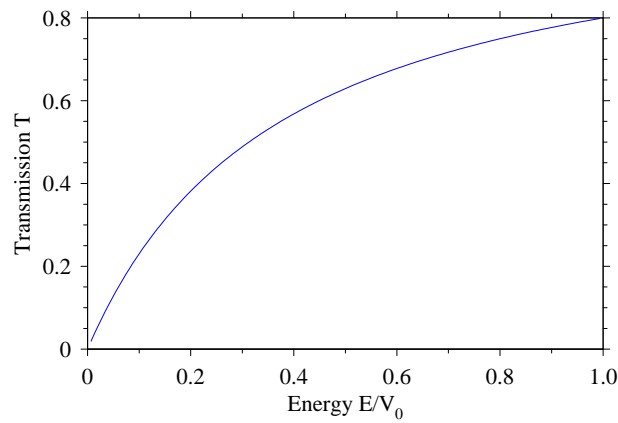
Фигура 3.2 показва коефициента на преминаване T като функция на енергията на частицата E . Коефициентът T нараства монотонно с увеличаването на E .

Тясна бариера ($\varkappa a \ll 1$). В този случай можем да направим приближението $\sinh(x) \approx x$ и получаваме:

$$T \approx \frac{1}{\frac{mV_0^2 a^2}{2\hbar^2 E} + 1}. \quad (3.29)$$



Фигура 3.2: Коефициент на преминаване T като функция на ширината на бариерата a (в единици $1/\kappa$) за $E = V_0/2$.



Фигура 3.3: Коефициент на преминаване T като функция на енергията на частицата E (в единици V_0) за $a^2 = \hbar^2/(2mV_0)$.

Широка бариера ($\kappa a \gg 1$). В този случай можем да направим приближението $\sinh(x) \approx e^x/2$ и получаваме:

$$T \approx \frac{1}{\frac{V_0^2 e^{2\kappa a}}{16E(V_0 - E)} + 1} \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\kappa a}, \quad (3.30)$$

т.е. тунелният ефект намалява експоненциално с увеличаването на ширината на бариерата a .

Забележка: Извеждането на коефициента F и равенството $R + T = 1$ не се изисква за изпита.