Глава 2

Основи на квантовата механика

2.2 Съотношение на Хайзенберг за неопределеност

Състояния с определени стойности на физичните величини

Дисперсията на една физична величина в класическата физика се задава със средната стойност на величината $D_A = (A - \bar{A})^2$, т.е.

$$D_A = \frac{1}{N} \sum\nolimits_{k=1}^{N} (A_k - \bar{A})^2, \tag{2.1}$$

където $A_1, A_2, \dots, A_N$ са резултатите от физичните измервания на A, а $\bar{A}$ е средната стойност на A: $\bar{A} = \sum_{k=1}^{N} A_k/N$.

Съгласно първия принцип на квантовата механика операторът на дисперсията се задава по аналогичен начин на класическата дисперсия:

$$\widehat{D}_A = (\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})^2, \tag{2.2}$$

където операторът $\widehat{A}$ е ермитов: $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}$. Средната стойност на дисперсията на величината A в състояние $|\Psi\rangle$ на квантовата система съгласно следствието от третия принцип на квантовата механика е

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D}_A \rangle &= \langle \Psi | \widehat{D}_A | \Psi \rangle = \langle \Psi | (\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})^2 | \Psi \rangle \\ &= (\Psi, (\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})^2 \Psi) = ((\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})\Psi, (\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})\Psi) = \|(\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})\Psi\|^2 \geqq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Една физична величина има определена стойност тогава и само тогава, когато нейната дисперсия е нула: $\langle \widehat{D}_A \rangle = 0$, т.е. когато $(\widehat{A} - \bar{A}\,\widehat{1})|\Psi\rangle = 0$, или $\widehat{A}|\Psi\rangle = \bar{A}|\Psi\rangle$. Оттук получаваме, че ако физичната величина A има определена стойност в състояние $|\Psi\rangle$, то това състояние е едно от собствените състояния $|a_n\rangle$ на съответния оператор $\widehat{A}$: $|\Psi\rangle = |a_n\rangle$, както и трябва да бъде съгласно третия принцип на квантовата механика. При това средната стойност на A е точно собствената стойност на $\widehat{A}$ в това собствено състояние: $\bar{A} = \alpha_n$.

Оттук лесно намираме в какви състояния две различни физични величини A и B има *едновременно* определени стойности: това са само тези състояния $|a_n\rangle$, които са едновременно собствени състояния на съответните оператори $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$\widehat{A}|a_n\rangle = \alpha_n |a_n\rangle, \qquad \widehat{B}|a_n\rangle = \beta_n |a_n\rangle. \tag{2.4}$$

Оттук веднага следва, че ако операторите $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ *комутират*, $[\widehat{A},\widehat{B}]=0$, и следователно имат едни и същи собствени вектори, то те могат да имат едновременно определени стойности, т.е. *могат да бъдат измерени едновременно с произволна точност*, ако квантовата система е в някое от собствените състояния на $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Един набор от физични величини се нарича *пълен*, ако съответните оператори комутират един с друг и този набор не може да бъде разширен.

Съотношение на Хайзенберг за неопределеност

Ако два оператора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ *не комутират*,

$$[\widehat{A},\widehat{B}]\neq 0, \tag{2.5}$$

то те нямат обща система от собствени вектори. Понеже всяка от дисперсиите на тези оператори,

$$\widehat{D}_A=(\widehat{A}-\bar{A}\,\widehat{1})^2, \qquad \widehat{D}_B=(\widehat{B}-\bar{B}\,\widehat{1})^2, \tag{2.6}$$

се нулира само в собствените състояния на съответния оператор, а тези състояния са различни за $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, то двете дисперсии не може да са едновременно нула (освен ако по случайност някое състояние не е собствено на $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$). Следователно физичните величини A и B не могат да бъдат измерени едновременно с произволна точност.

Нека да означим комутатора на $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ така

$$[\widehat{A},\widehat{B}]=i\widehat{C}. \tag{2.7}$$

Понеже $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ са ермитови оператори, то лесно се вижда, че и $\widehat{C}$ е ермитов. Наистина,

$$\begin{aligned}\widehat{C}&=-i[\widehat{A},\widehat{B}]=-i(\widehat{A}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{A}),\\ \widehat{C}^\dagger&=i(\widehat{A}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{A})^\dagger=i(\widehat{B}\widehat{A}-\widehat{A}\widehat{B})=\widehat{C}.\end{aligned}$$

Оттук е ясно защо в дефиницията на $\widehat{C}$ е включена имагинерната единица i.

Нека да въведем ермитовите оператори

$$\widehat{\Delta}_A=\widehat{A}-\bar{A}\,\widehat{1}, \qquad \widehat{\Delta}_B=\widehat{B}-\bar{B}\,\widehat{1}; \tag{2.8}$$

следователно $\widehat{D}_A=\widehat{\Delta}_A^2$ и $\widehat{D}_B=\widehat{\Delta}_B^2$. Тези оператори имат същия комутатор като $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$[\widehat{\Delta}_A,\widehat{\Delta}_B]=i\widehat{C}. \tag{2.9}$$

Средните стойности на дисперсиите на операторите $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в състояние $|\Psi\rangle$ са:

$$\begin{aligned}\langle\widehat{D}_A\rangle&=\langle\Psi|\widehat{\Delta}_A^2|\Psi\rangle=\|\widehat{\Delta}_A\Psi\|^2,\\ \langle\widehat{D}_B\rangle&=\langle\Psi|\widehat{\Delta}_B^2|\Psi\rangle=\|\widehat{\Delta}_B\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Сега ще използваме две добре известни комплексни неравенства:

$$|\langle a|b\rangle|=\|a\|\;\|b\|, \tag{2.10а}$$

$$|\Im(z)|\leqq|z|. \tag{2.10б}$$

Първото неравенство изразява добре известния факт, че скаларното произведение на два вектора по модул не надминава произведението от дължините на векторите. Второто неравенство изразява факта, че имагинерната част $\Im(z) = (z - z^*)/(2i)$ на едно комплексно число z не надминава по големина модула на комплексното число $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$.

Използваме тези две неравенства и получаваме

$$\begin{aligned}
\sqrt{\langle \widehat{D}_A \rangle \langle \widehat{D}_B \rangle} &= \|\widehat{\Delta}_A \Psi\| \; \|\widehat{\Delta}_B \Psi\| \geqq \left| \langle \widehat{\Delta}_A \Psi | \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle \right| \geqq \left| \Im(\langle \widehat{\Delta}_A \Psi | \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle) \right| \\
&= \left| \frac{\langle \widehat{\Delta}_A \Psi | \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle - \langle \widehat{\Delta}_A \Psi | \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle^*}{2i} \right| = \tfrac{1}{2} \left| \langle \widehat{\Delta}_A \Psi | \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle - \langle \widehat{\Delta}_B \Psi | \widehat{\Delta}_A \Psi \rangle \right| \\
&= \tfrac{1}{2} \left| \langle \Psi | \widehat{\Delta}_A \widehat{\Delta}_B \Psi \rangle - \langle \Psi | \widehat{\Delta}_B \widehat{\Delta}_A \Psi \rangle \right| = \tfrac{1}{2} \left| \langle \Psi | [\widehat{\Delta}_A, \widehat{\Delta}_B] | \Psi \rangle \right| \\
&= \tfrac{1}{2} \left| \langle \Psi | i\widehat{C} | \Psi \rangle \right| = \tfrac{1}{2} \langle C \rangle. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Неопределеностите в стойностите на двете физични величини A и B са $\Delta_A = \sqrt{\langle \widehat{D}_A \rangle}$ $\Delta_B = \sqrt{\langle \widehat{D}_B \rangle}$. Следователно намерихме, че

$$\Delta_A \Delta_B \geqq \tfrac{1}{2} \langle C \rangle. \qquad (2.12)$$

Това неравенство се нарича *съотношение на Хайзенберг за неопределеност* за величините A и B. То позволява да намерим долната граница на *грешката при едновременното измерване на величините A и B* в квантовото състояние $|\Psi\rangle$, която е равна на средната стойност на комутатора на съответните оператори $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в това състояние $|\Psi\rangle$.

От съотношението на Хайзенберг веднага следва, че колкото по-точно измерваме една величина A, толкова по-голяма грешка внасяме в стойността на другата величина B.

Съотношение на Хайзенберг за неопределеност: примери

Координата и импулс. Най-важният пример за съотношение на Хайзенберг за неопределеност е това за операторите на координатата $\widehat{x}$ и импулса $\widehat{p_x} = -i\hbar(d/dx)$. Комутаторът на тези оператори е

$$[\widehat{x}, \widehat{p_x}] = \widehat{x}\widehat{p_x} - \widehat{p_x}\widehat{x} = -i\hbar \left(x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x \right) = -i\hbar \left(x\frac{d}{dx} - x\frac{d}{dx} - 1 \right) = i\hbar, \qquad (2.13)$$

понеже

$$\frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}. \qquad (2.14)$$

И така, имаме в този случай, че $\widehat{C} = \hbar\widehat{1}$ и $\langle \widehat{C} \rangle = \hbar$. Следователно *съотношението на Хайзенберг за координатата и импулса* е

$$\Delta_x \Delta_{p_x} \geqq \frac{\hbar}{2}. \qquad (2.15)$$

Това неравенство показва, че квантовата механика не позволява едновременното измерване с абсолютна точност стойностите на координатата и импулса на една частица: колкото по-точно мерим координатата, толкова по-голяма грешка внасяме в импулса и обратно. Съотношението на Хайзенберг е фундаментално физично ограничение, което не може да бъде преодоляно с повишаване на точността на измервателните уреди. Все пак, дясната страна на неравенството (2.15) е много малко число, което е трудно да бъде достигнато в реален експеримент, но вече има експерименти, които тестват съотношението на Хайзенберг за неопределеност (макар и в други променливи).

Компоненти на ъгловия момент. Компонентите на оператора на ъгловия момент $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{L}}/\hbar$ удовлетворяват комутационното съотношение

$$[\widehat{J}_j, \widehat{J}_k] = i\varepsilon_{jkn}\widehat{J}_n, \tag{2.16}$$

където ε_{jkn} е символът на Леви-Чивита. Например имаме

$$[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\widehat{J}_z. \tag{2.17}$$

Следователно в този случай $\widehat{C} = \widehat{J}_z$ и съотношението на Хайзенберг е

$$\Delta_{J_x}\Delta_{J_y} \geqq \frac{\langle \widehat{J}_z \rangle}{2}. \tag{2.18}$$